Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
12.05.2022

Lineare Algebra II
Blatt 6

---

1 | Minimalpolyphon

Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Minimalpolynome der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sie dürfen in jedem Fall bereits verwenden, dass das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt. Es kann sein, dass weitere Sätze der Vorlesung die Aufgabe etwas vereinfachen werden.

2 | Zerlegung

Untersuchen Sie, ob in den folgenden Beispielen der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ in eine direkte Summe der angegebenen Unterräume zerfällt, ob also gilt $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ bzw. $\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W$ *(siehe auch Blatt 2, Aufgabe 5).*

(a) $U := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_2 = a_3\}$
$V := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + 2a_2 + a_3 = 0, a_1 = a_3\}$

(b) $U := \{(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_3 = 0, a_2 + a_4 = 0\}$
$V := \{(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_2 = 0, a_1 + a_4 = 0\}$

(c) $U := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 0, a_2 = a_3\}$
$V := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 = 0, a_1 = a_3\}$
$W := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = 0, a_1 = a_2\}$

3 | Ideale

Ein **Ideal** in einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Untergruppe I von $(R, +)$ mit der Eigenschaft $r \cdot a \in I$ für alle $r \in R$ und alle $a \in I$. Ein **Hauptideal** in einem kommutativen Ring R ist ein Ideal, das von einem einzigen Element $a \in R$ erzeugt wird, also von der Form $(a) := \{r \cdot a \mid r \in R\}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Zahlen ein Hauptideal in $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Kern eines Ringhomomorphismus $R \to S$ ein Ideal in R ist.

(d) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Ringe S, für die ein surjektiver Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to S$ existiert.

4 | Doppelsymmetrie

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $1+1 \neq 0$ in K. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf V in eindeutiger Weise als eine Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform schreiben lässt.

Abgabefrist: 23.05.2022, 10:15 Uhr.